Линейное Программирование

MAX $2x+y-z$

s.t.

$x \leq 10$

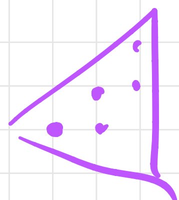
$z \leq 5$

$x+y \leq z$

$y \leq z$

$x-y \leq 3z$

$x \geq 0$



Def: Линейное пр-ие:

- Переменные: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$
- Линейные ограничения: $\alpha x + \beta y + \gamma z \leq \delta$
- Линейная целевая ф-ия: $\alpha x + \beta y + \gamma z \to \min/\max$

Замечание 1: LP разрешима за poly(input)

def: IP (ILP) — целочисленное л.п. это л.п. + условие что все или какой-то набор переменных $\in \mathbb{Z}$.

Замечание 2: $IP \in NP_{complete}$

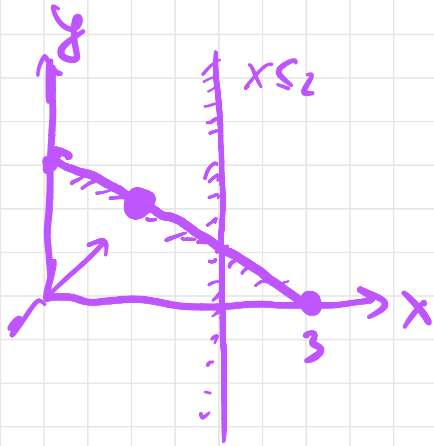
Утверждение: для задачи LP верно одно из трёх:

1) $\nexists$ решения
2) $\exists$ опт. решение.
3) Задача неограничена = $\exists$ сколь-угодно хорошее решение

$\max\ x+y$

$x \leq 2$

$x+2y \leq 3$



$\max\ -x-y$

$x \leq 1$

$x+2y \leq 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + x_2 \geq 0$

Алгоритм Фурье

$\{Ax \leq b\}$ – проверить пусто или нет

← f – афф ф-ия $\sum \alpha_i x_i + \gamma_i$

① $x_1 \geq f(x_2, \dots, x_n)$

② $x_1 \leq g(x_2, \dots, x_n)$

③ $h(x_2, \dots, x_n) \geq 0$

$x+2y$ – лин. ф-ия

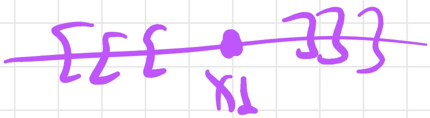
$x+2y+3$ – афф. ф-ия

Как решить?

Нужно чтобы было вып. (3)

$f_i \leq x_1$

$x_1 \leq g_j$



$\forall i \, \forall j$ добавим условие

$f_i \leq g_i$

Пример:

$x_1 \geq x_2 + x_3$

$x_1 \leq x_2 + 10x_3$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_2 + x_3 \leq x_2 + 10x_3}$

Двойственность.

P: $\max c^T x$ $\quad (= \langle c, x \rangle)$

s.t.

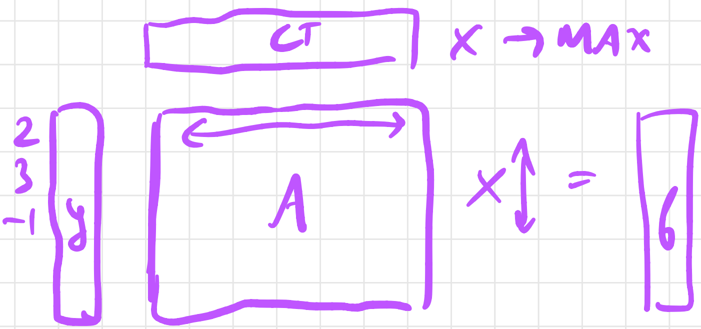
$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

1. $x + y = 3$
2. $x + 2y = 4$

$3x + 5y = 11$

Цель: оценить P сверху.



Пусть y – веса над строками матр. A

$$(y^T A)x = y^T b$$

Хочется чтобы это помогло оценить $c^T x$

Пусть $y^T A \geq c^T$ (см след и вспомним что $x \geq 0$)

Тогда

$$c^T x \leq (y^T A) x = y^T A x = y^T b = \langle y, b \rangle$$

Поставим цель: сделать оценку как можно лучше.

$$\mathcal{D}: \quad \begin{array}{l} \min \ b^T y \\ \text{s.t.} \\ \quad A^T y \geq c \end{array} \qquad \left((y^T A)^T = A^T y\right)$$

<u>Утв:</u> слабая дв-ость; удовл. всем условиям.

Пусть x - доп. решение P

Пусть y - доп решение $\mathcal{D}$

Тогда $c^T x \leq b^T y$ $\square$

Утв: Сильная дв-ность:

пусть P-имеет доп. решение

пусть D-имеет доп. решение.

тогда $OPT_P = OPT_D$ без д-ва

Утв: Сильная дв-ность:

пусть у P ∃ опт. решение

тогда у D тоже ∃ опт. решение

и $OPT_P = OPT_D$ без д-ва

Complementary Slackness
(Двойственная нежёсткость)

$$P: \quad \max \ c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0$$

$$D: \quad \min \ b^T y \quad \text{s.t.} \quad A^T y \geqslant c, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

Lm: Пусть x – доп. решение P,
y – доп. решение D.

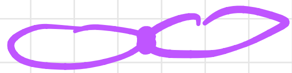
Тогда след. услов. эквив:

1. x – опт для P, y – опт для D.
2. $c^T x = b^T y$
3. $\forall i \ (x_i = 0 \ \vee \ (A^T y)_i = c_i)$

Д-во:

$1 \Rightarrow 2$: сильная дв-ность

$2 \Rightarrow 1$: слабая дв-ность.



$2 \Leftrightarrow 3$

$$c^T x \le y^T A x = y^T b$$

$$c^T x = y^T b \iff c^T x = y^T A x$$

② $$\iff \underbrace{(y^T A - c^T)}_{\ge 0} \cdot \underbrace{x}_{\ge 0} = 0$$

$\iff$ ③

т.к. $y^T A \ge c^T$

и $x \ge 0$

$$(y^T A - c^T) x =$$

$$= \sum_i \underbrace{x_i}_{\ge 0} \cdot \underbrace{((y^T A)_i - c_i)}_{\ge 0}$$

Взвешенное паросочетание

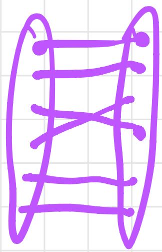
двуд. граф $w=1$ ✓ → двуд. граф ✓ w – любые

↓?

не двуд. граф $w=1$ → не двуд. граф w – любые

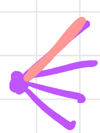
Техн. упрощение:

пусть мы ищем сов. паросочетание



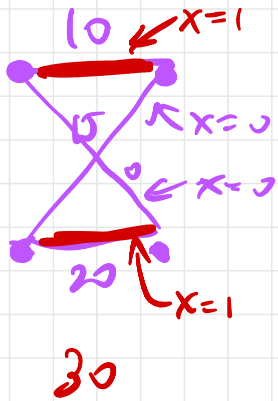
и между каждой парой вн есть ребро

P:
$$\max \sum w_e \cdot x_e$$
s.t.
$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V$$
$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$$

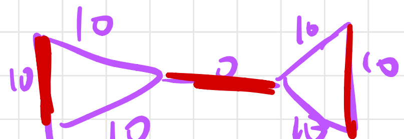


Утв: $P \cap \{0,1\}^E$ – получится мн-во индикаторов. соверш. паросочетаний

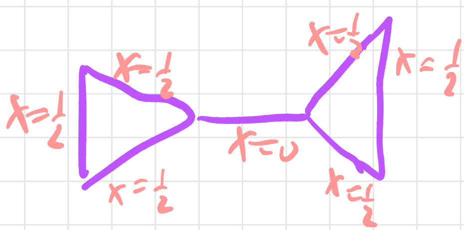
Пример хороший



Пример плохой:



$w=20$



$w=30$

Утв: Если G - двудольный, то у P всегда есть целое опт. решение

(без д-ва, и нам не нужно Д-во)

P: $\max \sum w_e \cdot x_e$

s.t.

I $\sum\limits_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V$

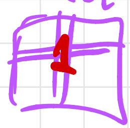
II $x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$

$\max c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

$e \in E$



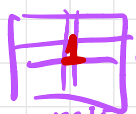
$v \in V$

D: $\min \sum y_v$

$y_a + y_b \geq w_{ab} \quad \forall (a,b) \in E$

$\min b^T y$

$A^T y \geq c$



$e \in E$

$v \in V$

Утв: Пусть x - доп. для P, y - для D

Тогда x-опт и y-опт $\Leftrightarrow$ CS. $x_{ab} = 0 \vee y_a + y_b = w_{ab}$ $\forall ab \in E$.

CS. $x_{ab} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_a + y_b = w_{ab}$

Алгоритм.

0) Пусть $W = \max\limits_{a,b \in E} w_{ab}$

Тогда пусть

$x := 0 \qquad y := W/2$

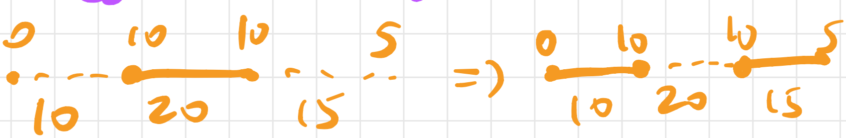
а) y — доп. решение $\mathcal{D}$

б) x — удовл II, но не I

в) выполнено CS.

1) while $|M| < n$:

- Если в G сущ. увел. цепочка по рёбрам (a,b): $y_a + y_b = w_{ab}$, то увеличить по цепочке



- Иначе:

  запустим dfs из непокр. вершин L.

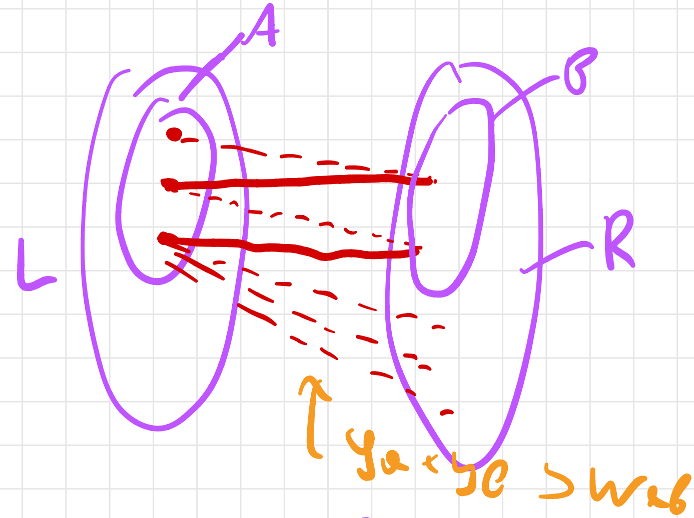
  пусть посетили $A \subseteq L$, $B \subseteq R$.

  $y_{R \setminus B} \mathrel{-}= \varepsilon \qquad y_{L \setminus A} \mathrel{+}= \varepsilon$

  $\varepsilon \to \max$

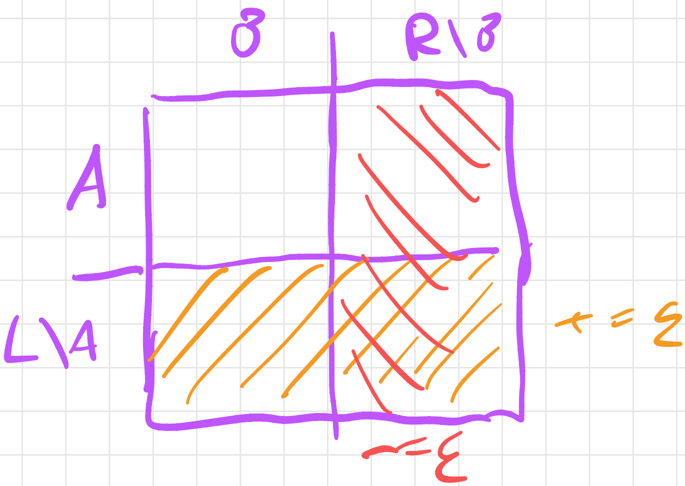
$y_{R \setminus B} \mathrel{-}= \varepsilon$

$y_{L \setminus A} \mathrel{+}= \varepsilon$



Рассмотрим $f_{uv} = y_u + y_v - w_{uv}$

$f_{uv} \geq 0$



	B	$R \setminus B$
A	0	$-\varepsilon$
$L \setminus A$	$+\varepsilon$	0

Заметим $f_{uv} > 0$ $\forall u \in A, v \in R \setminus B$

Значит при дост. малом ε $f'_{uv} \geq 0$

Заметим, что $(u,v) \notin M$, где $u \in L \setminus A$, $v \in B$

$\Rightarrow$ значит увеличить f_{uv} для таких рёбер не портит CS.

Утв: для дост. малого ε.

операция

$$y_{R \setminus B} \mathrel{-}= \varepsilon$$

$$y_{L \setminus A} \mathrel{+}= \varepsilon$$

не портит инварианты

poly(n) памяти

макс. без нарост.

Приближенные алгоритмы.

Пусть S - мн-во допустимых решений

Если задача найти $s \in S$, что

$f(s) \to \max$, то задача макс

Если задача найти $s \in S$

$f(s) \to \min$, то задача min.

Пусть OPT - величина OPT

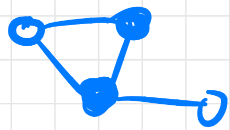
def: y - c-приближение, если

Если $\underset{random}{E}[y] \geq \frac{1}{c}\, OPT$ (если макс.)

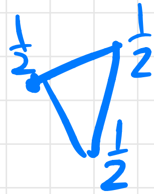
или

$\underset{random}{E}[y] \leq c \cdot OPT$ (если min)

VERTEX COVER



2-приближение:



$$\min \sum y_v$$

P s.t.

$$y_v + y_u \geq 1 \quad \forall (v,u) \in E$$

$$y_v \geq 0$$

Пусть y — опт. решение P

Пусть $\bar{y}_v = \begin{cases} 1, & \text{если } y_v \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ (округление)

Утв 1: $\bar{y}$ — индикатор вершинного покрытия

: $y_v + y_u \geq 1$

$\Rightarrow \max(y_v, y_u) \geq \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \bar{y}_v = 1$ или $\bar{y}_u = 1$

Утв2: $\bar{y}$ – 2-приближение:

$$OPT_{LP} \leqslant OPT_{IP}$$
(y) $(\min VC)$

$$\sum \bar{y}_v \leqslant 2 \sum y_v = 2\, OPT_{LP} \leqslant 2 \min VC$$

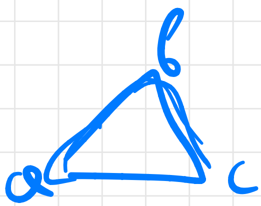
$\bar{y}_v \leqslant 2 y_v$

LP

TSP

$$\sum w_e \to \min$$

Обычно считаем что есть нер-во Δ:



$$w_{ac} \le w_{ab} + w_{bc}$$

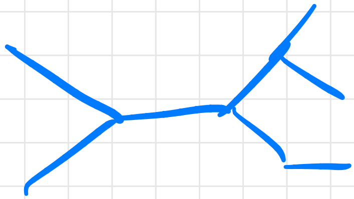
Полином. приближение:

2-приближение

1.5-приближения 1976

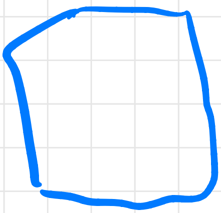
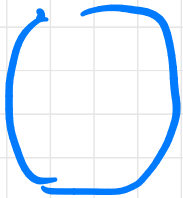
$(1.5 - 10^{-36})$-прибл. 2020

2-приближение



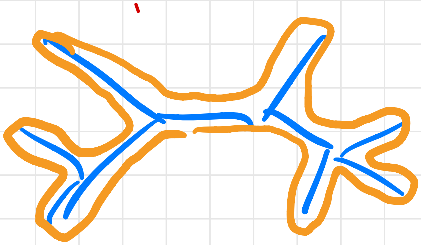
MST

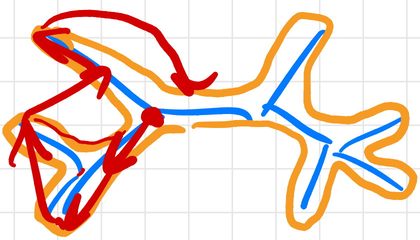
$MST \leq TSP$

 $\geq$  $\geq MST$

TSP

Ответ размера $\leq 2MST$





$2 \cdot MST$

$\leq 2MST \leq$

$\leq 2OPT$